2. *Justifique las igualdades que se deducen de la construcción de Bombelli.*

5.1.3.4. El *Ars magna* de Cardano: la fórmula general

Hasta el siglo XV, los desarrollos sobre álgebra consistían en grandes cantidades de ejemplos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, para las que se encontraban soluciones particulares con métodos y reglas particulares. Un desarrollo más moderno del álgebra se inicia en el Renacimiento Italiano, hacia el año 1545, con la publicación del *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576) en el cual se muestran las soluciones para la ecuación cúbica y cuártica, desarrolladas por Scipione del Ferro (1465-1526), Nicolo Fontana Tartaglia (1500-1557), Ludovico Ferrari (1522-1565) y él mismo; probablemente ésta fue la mayor contribución al álgebra, desde que los babilonios aprendieron a completar el cuadrado para solucionar ecuaciones cuadráticas, debido a la motivación que generó para el estudio de la solución de ecuaciones polinómicas de grado mayor.

Hacia finales del siglo XV, Scipione Del Ferro (1465–1526) encontró la solución a la ecuación cúbica $x^3 + px = q$ empleando la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

La fórmula de Del Ferro es la que actualmente se usa, sin embargo, aún no se conoce cómo la obtuvo.

5.1.3.4.1. La solución de Tartaglia

Tartaglia, hacia 1541 resolvió y clasificó en tres diferentes tipos a las ecuaciones cúbicas, a saber:

$$x^3 + px = q$$
$$x^3 = px + q$$
$$x^3 + q = px$$

Cuando Tartaglia comunico a Cardano y Ferrari el método operativo para solucionar ecuaciones de tercer grado sin término de segundo grado, lo hizo por medio de versos, en los primeros de ellos se indica cómo resolver la primera de las anteriores ecuaciones, veamos[122]:

[122] Casalderrey, F. (2000). *Cardano y Tartaglia las matemáticas en el renacimiento italiano*. Madrid: nivola. p. 117

Cuando está el cubo con las cosas preso
y se iguala a algún número discreto
busca otros dos que difieran en eso.

Después tú harás esto que te espeto
que su producto siempre sea igual
al tercio cubo de la cosa neto

Después el resultado general
de sus lados cúbicos bien restados
te dará a ti la cosa principal.

Escribiendo lo anterior en la notación actual tenemos[123]:

Cuando esta el cubo con las cosas preso, significa que en el mismo término están el cubo, x^3, con *las cosas* (con un número de veces la cosa, o lo que es igual, px), esto es, $x^3 + px$; *y se iguala a algún número discreto*, es decir, un entero q, tenemos, por tanto, la ecuación:

$$x^3 + px = q.$$

Busca otros dos que difieran en eso, es decir, encontrar dos números u y v tales que:

$$u - v = q,$$

Después tú harás esto que te espeto, que su producto siempre sea igual al tercio cubo de la cosa neto, es decir, un tercio del coeficiente de x elevado al cubo:

$$uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Después el resultado general de sus lados cúbicos bien restados[124] te dará a ti la cosa principal, esto es:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}\ .$$

Analicemos un poco más lo anterior; para resolver la ecuación $x^3 + px = q$, se deben buscar dos números u y v tales que:

$$u - v = q \qquad (1)$$

$$u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad (2)$$

[123] Casalderrey, F. (2000). *Cardano y Tartaglia las matemáticas en el renacimiento italiano*. Madrid: nivola. p. 118
[124] Con esto se refiere a que el resultado de la resta sea positivo.

La ecuación (1) puede expresarse como $u = q + v$, de manera que:

$$(q+v)\,v = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

y al realizar las operaciones,

$$v^2 + qv = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

ya que p y q son números conocidos, la ecuación anterior, es una ecuación cuadrática en v cuya solución positiva está dada por:

$$v = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\cdot 1\cdot\left(-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

luego,

$$u = q + v = q - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

por tanto, la solución, según indica Tartaglia es:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

5.1.3.4.2. La demostración de Cardano

Cardano en su *Ars magna*, demuestra la solución de la ecuación cúbica valiéndose de dos figuras planas, sin embargo, así como puede asociarse a la ecuación cuadrática con áreas de cuadrados[125], podemos asociar a la cúbica, con volúmenes de cubos, esto es, considerar un cubo de lado $AC = s$, y dividir este lado por medio de un punto B tal que $BC = r$. Repitiendo la misma división en cada una de las aristas del cubo, de manera que se obtengan ocho piezas entre cubos y prismas rectangulares, nuestro cubo adquiere la siguiente apariencia:

[125] Luque, C., Mora, L. & Paez, J. (2002). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*. Bogotá: Antropos, Universidad Pedagógica Nacional. pp. 103-107.

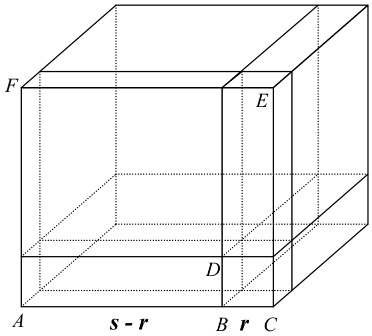

Figura 10

y si separamos las piezas,

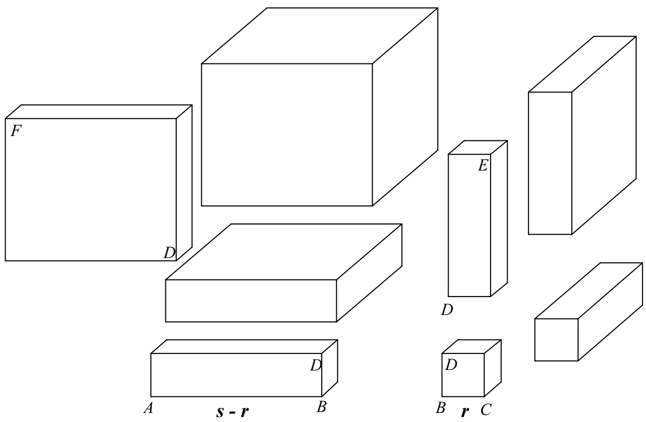

Figura 11

Ahora, el cubo inicial de lado s, tiene volumen s^3, por tanto si a este volumen le quitamos el volumen del cubo pequeño de lado r, es decir $s^3 - r^3$, el volumen resultante es la suma de los volúmenes de las otras siete piezas, esto es:

$$s^3 - r^3 = (s - r)^3 + 3(s - r)(r)^2 + 3(s - r)^2(r),$$

o lo que es igual:

$$s^3 - r^3 = (s - r)^3 + 3sr(s - r),$$

haciendo $x = s - r$, la expresión anterior se transforma en:

$$x^3 + 3srx = s^3 - r^3,$$

ahora, si llamamos a $3sr = p$ y a $s^3 - r^3 = q$, tenemos la ecuación:

$$x^3 + px = q,$$

la ecuación de tercer grado que hemos venido trabajando, sólo que ahora, por medio de razonamientos geométricos y haciendo $s^3 = u$ y $r^3 = v$, sabemos que:

$$u - v = q \qquad (1^*)$$

$$u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad (2^*)$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} \qquad (3)$$

las cuales son las mismas relaciones que establece Tartaglia, y que como vimos, conducen a:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

El ejemplo usado por Cardano para mostrar la solución de la ecuación general del primer tipo, fue la ecuación $x^3 + 6x = 20$ (como vimos antes) e introduce un cambio de incógnita con $x = u - v$, obteniendo la ecuación;

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 20$$
$$(u^3 - v^3) - 3uv\,(u - v) + 6(u - v) = 20$$
$$(u^3 - v^3) + 6(u - v) = 20 + 3uv\,(u - v),$$

que se puede interpretar como

$$u^3 - v^3 = 20$$
$$3uv = 6$$

Luego, $uv = 2$ y, por ello, $u^3\,v^3 = 8$. Si se conocen la diferencia y el producto de los cubos, se obtiene la ecuación cuadrática $u^6 = 20u^3 + 8$, cuya solución para es

$$u^3 = \sqrt{108} + 10$$
$$v^3 = \sqrt{108} - 10$$

por lo que

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$$
$$v = \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

de donde,

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Con ejemplos como estos, Cardano expresa una fórmula general:

> Eleve al cubo un tercio del 'número de lados'[126] adicione a esto, el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, y tome la raíz cuadrada de todo. Pondrá esto dos veces, y a una de las dos adicione una mitad del número del que ha encontrado el cuadrado[127] y del otro, usted sustrae una mitad del mismo. Usted tendrá entonces un binomio $\sqrt{108}+10$ y esto es apotome $\sqrt{108}-10$. Entonces substrae la raíz cúbica de la apotome de la raíz cúbica del binomio, el residuo es el lado buscado. (Van der Waerden, 1985, p. 54)

Otro aspecto sobresaliente de esta obra, es la introducción de los números hoy denominados complejos, en los casos en que la diferencia de las cantidades subradicales es negativa. En una de sus anotaciones, cuando divide 10 en dos partes, de manera que el producto es 40, Cardano escribió:

> Es claro que este caso es imposible. No obstante, nosotros trabajaremos así: Nosotros dividimos 10 en dos partes iguales, cada uno es 5. Nuestro cuadrado es 25. Substraiga 40, si usted quiere el 25 así producido, cuando yo lo mostré en el capítulo sobre operaciones en el sexto libro, dejando un residuo de –15, la raíz cuadrada de la que adicionó o sustrajo de 5 partes dadas, el producto el cual es 40. Estos serán 5 + $\sqrt{-5}$ y 5 – $\sqrt{-5}$. (Van der Waerden, 1985, p. 56)

Luego demuestra que los números así producidos satisfacen la ecuación, cuando escribe "Poniendo aparte las torturas mentales involucradas, multiplicar 5+$\sqrt{-5}$ por 5 – $\sqrt{-5}$, da 25 – (–15), lo cual es 40. Ahora su producto es 40."

5.1.3.4.3. Solución a la ecuación general de tercer grado

Cardano en el *Ars Magna* presenta en total 13 reglas para solucionar ecuaciones cúbicas según los casos considerados, y finalmente en el capítulo XVII titulado *Del cubo, cuadrado, y la cosa igual al número* aborda la solución de una ecuación cúbica completa, a saber:

$$x^3 + 6x^2 + 20x = 100$$

Para resolverla, reduce esta ecuación a una incompleta del tipo básico, es decir, $x^3 + px = q$, resoluble mediante la fórmula de Del Ferro–Tartaglia, aplicando para ello un cambio de variable que hace desaparecer el término en x^2, en este caso, hace $x = y - \frac{6}{3} = y - 2$ con lo que se obtiene la ecuación:

---

[126] Hace referencia a los tres coeficientes de x.
[127] Es decir, la mitad de la constante de la ecuación, en este caso 10.

$$y^3 + 8y = 124,$$

ecuación que como vimos, puede ser resuelta por medio de la fórmula de Del Ferro-Tartaglia.

De manera general, Cardano soluciona la ecuación de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ haciendo la sustitución y cambiando la representación de la ecuación original:

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

Se desconoce cómo Cardano obtuvo esta sustitución, sin embargo, presentamos a continuación un posible argumento:

Si la idea es reducir la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a la forma $x^3 + px = q$, por medio de un cambio de variable, supongamos $x = y + r$, con y la nueva variable y encontremos el r apropiado, tal que el término en y^2 no aparezca en la nueva ecuación, para ello sustituimos x en la ecuación dada:

$$a(y + r)^3 + b(y + r)^2 + c(y + r) + d = 0,$$

después de realizar algunos cálculos y agrupaciones, tenemos que la ecuación anterior es:

$$ay^3 + (3ar + b)y^2 + (3ar^2 + 2br + c)y + (ar^3 + br^2 + cr + d) = 0,$$

como queremos que el coeficiente de y^2 sea cero, entonces hacemos que,

$$3ar + b = 0,$$

y con esto, concluimos que r debe ser:

$$r = -\frac{b}{3a}$$

con lo cual obtenemos que $x = y - \dfrac{b}{3a}$ y de este modo la ecuación se reduce a:

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b}{3a^2}\right)y = \frac{9abc - 2b^3 - 27ad}{27a^3}$$

5.1.3.5. Solución moderna de la ecuación cúbica[128]

Sea la ecuación de tercer grado:

$$ex^3 + fx^2 + gx + h = 0 \text{ con } e \neq 0,$$

donde x es una incógnita, e, f, g y h son constantes.

Supongamos que existe al menos una solución[129] en el conjunto de los números complejos, luego, para resolver esta ecuación, multiplicamos ambos lados de ella por $1/e$, y obtenemos:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a = \frac{f}{e}$, $b = \frac{g}{e}$ y $c = \frac{h}{e}$.

Eliminaremos el término con x^2, cambiando la incógnita x por otra incógnita y de manera que:

$$x = y - \frac{a}{3},$$

remplazando en la ecuación y realizando algunos cálculos obtenemos la ecuación:

$$y^3 + py + q = 0$$

donde $p = b - \frac{a^2}{3}$ y $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

ecuación que es equivalente a la ecuación que pretendemos resolver.

Hasta ahora sólo hemos eliminado un término de la ecuación original. El siguiente paso consiste en cambiar una ecuación de tercer grado con una incógnita, en dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, para ello cambiemos a y por $u + v$.

Remplazando y operando, obtenemos

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$$

como la suma es 0, eso se puede lograr si suponemos que:

---

[128] Luque, C.; Mora, L. & Torres, J. (2005). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: clasificar, medir, invertir*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[129] Esta suposición es necesaria, ya que de no ser así, ninguno de los procedimientos que siguen tendría algún sentido.

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{y} \qquad (3uv + p)(u + v) = 0$$

Por tanto, el problema se reduce a resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas,

$$u^3 + v^3 = -q$$
$$3uv + p = 0$$

o lo que es igual,

$$u^3 + v^3 = -q$$
$$u^3 v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

Por tanto, debemos encontrar dos números, $z_1 = u^3$ y $z_2 = v^3$ tales que su suma sea $-q$ y su producto $\left(-\frac{p}{3}\right)^3$, lo cual nos conduce a la ecuación de segundo grado en z:

$$z^2 + qz - \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{y} \qquad z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

Ejercicios

En el desarrollo anterior, para la ecuación, $u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$ *se supuso que* $u^3 + v^3 + q = 0$ *y* $(3uv + p)(u + v) = 0$, *¿Qué sucede si se supone que* $u^3 + v^3 + q = -(3uv + p)(u + v)$?

Siendo 1, α y α^2 las raíces cúbicas de 1, las cuales se deducen al solucionar la ecuación $x^3 - 1 = 0$, tenemos que:

$$\sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{1} \cdot u = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ \alpha \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ \alpha^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{cases}$$

y

$$\sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{1} \cdot v = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ \alpha \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ \alpha^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{cases}$$

o que podemos expresar como:

$$\sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{1} \cdot u = \begin{cases} u \\ \alpha \cdot u \\ \alpha^2 \cdot u \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{1} \cdot v = \begin{cases} v \\ \alpha \cdot v \\ \alpha^2 \cdot v \end{cases}$$

pero entonces debemos averiguar cuál de las nueve posibles combinaciones para $y = mu + nv$, en donde m y n son las raíces cúbicas de la unidad, son soluciones de la ecuación; veamos:

Evidentemente, se demuestra que una primera solución es $y_1 = u + v$, pues fue la sustitución que elegimos desde el principio.

Ahora si $y_2 = \alpha u + \alpha^2 v$, entonces

$$y_2^3 + py_2 + q = (\alpha u + \alpha^2 v)^3 + p(\alpha u + \alpha^2 v) + q$$

multiplicando,

$$y_2^3 + py_2 + q = (\alpha u)^3 + 3(\alpha u)^2(\alpha^2 v) + 3(\alpha u)(\alpha^2 v)^2 + (\alpha^2 v)^3 + p(\alpha u) + p(\alpha^2 v) + q$$

simplificando y agrupando,

$$y_2^3 + py_2 + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(\alpha u + \alpha^2 v)$$

pero como

$$u^3 + v^3 = -q \qquad \text{y} \qquad uv = -\frac{p}{3}$$

entonces

$$y_2^3 + y_2 + q = 0$$

con lo que se demuestra que $y_2 = \alpha u + \alpha^2 v$ es solución; de manera análoga se demuestra que $y_3 = \alpha^2 u + \alpha v$ también es solución, pero veamos que, por ejemplo, $\alpha u + \alpha v$ no es solución:

remplazando y por $\alpha u + \alpha v$, tenemos

$$y^3 + py + q = (\alpha u + \alpha v)^3 + p(\alpha u + \alpha v) + q$$

multiplicando,

$$y^3 + py + q = (\alpha u)^3 + 3(\alpha u)^2(\alpha v) + 3(\alpha u)(\alpha v)^2 + (\alpha v)^3 + p(\alpha u) + p(\alpha v) + q$$

simplificando y agrupando,

$$y^3 + py + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + \alpha p)(u + v)$$

donde

$$(u^3 + v^3 + q) = 0$$

pero

$$(3uv + \alpha p)(u + v) \neq 0$$

Luego $\alpha u + \alpha v$ no es solución de (I)

Entonces,

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = \alpha u + \alpha^2 v$$

$$y_3 = \alpha^2 u + \alpha v$$

son soluciones a la ecuación.

Ejercicio

Demuestre que las otras cinco combinaciones de raíces cúbicas de u^3 y v^3 no son soluciones de la ecuación $y^3 + py + q = 0$.